

13

Convexité

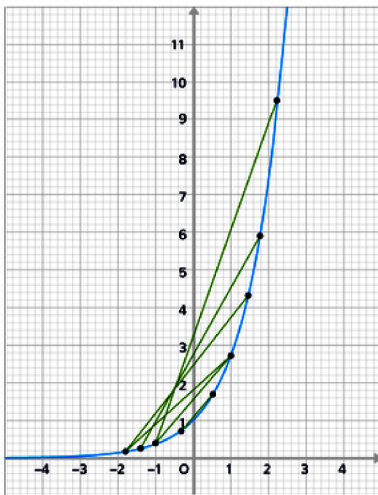
Objectifs :

- Connaître et savoir utiliser la définition de la convexité d'une fonction
- Démontrer des inégalités en utilisant cette notion
- Savoir esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de la donnée de tableaux de variations de f , de f' ou de f''
- Lire sur une représentation graphique de f , de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion. Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction.

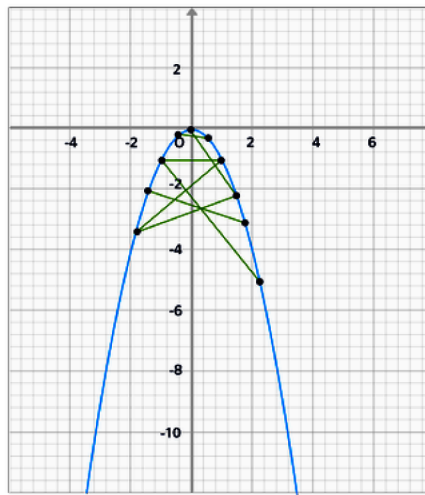
1. Fonction convexe

Définition 13.1 Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Si la courbe $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de ses cordes, on dit que la fonction f est **convexe**.
2. Si la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses cordes, on dit que la fonction f est **concave**.



Fonction convexe



Fonction concave

2. Convexité des fonctions deux fois dérivables

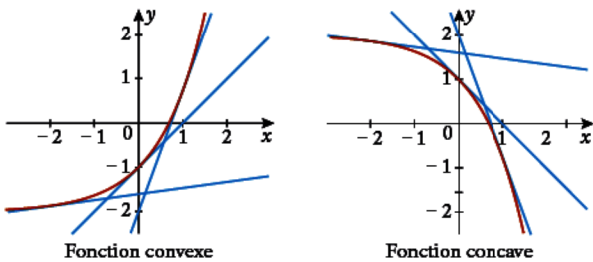
Propriété 13.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I et deux fois dérivable sur I .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est convexe sur I
- f' est croissante sur I
- f'' est positive sur I
- $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes

De la même manière, il y a équivalence entre :

- f est concave sur I
- f' est décroissante sur I
- f'' est négative sur I
- $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de ses tangentes



Ces propriétés sont admises, hormis la démonstration ci-dessous, qui est au programme (démonstration ROC).

Démonstration ROC : Démonstration au programme, à savoir refaire

Montrons l'implication suivante :

Si f'' est positive sur I , alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

Soient I un intervalle et f une fonction définie et deux fois dérivable sur I telle que $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$.

Soit $a \in I$. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Pour étudier les positions relatives de deux courbes, on étudie le signe de leur différence.

Posons donc, pour tout $x \in I$, $g(x) = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a))$.

En tant que composée de fonctions dérivables, g est dérivable sur I et l'on a :

$$\forall x \in I, g'(x) = f'(x) - f'(a).$$

Or on a supposé f'' positive, donc f est croissante, c'est-à-dire :

- Si $x \leq a$, $f'(x) \leq f'(a)$, i.e. $g'(x) \leq 0$
- Si $x \geq a$, $f'(x) \geq f'(a)$, i.e. $g'(x) \geq 0$

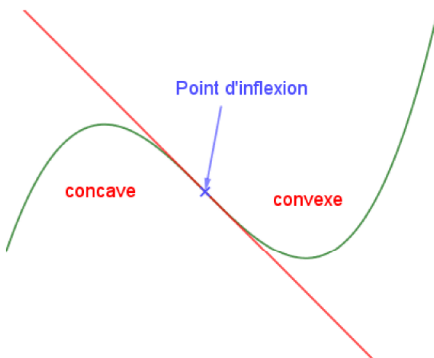
g admet donc un minimum en a , et $g(a) = 0$.

Par suite, g est positive sur I , ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

3. Point d'inflexion

Définition 13.2 Soient I un intervalle et f une fonction dérivable sur I .

On dit qu'un point A de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion ssi en ce point la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente.



Intuitivement, si la courbe est un toboggan, il y a un point d'inflexion lorsqu'à pleine vitesse, vous décollez du toboggan !



Les propriétés ci-dessous sont admises.

Propriété 13.2 Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

- Le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion ssi la convexité de f change en a .
- Si de plus f est deux fois dérivable sur I , alors le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion ssi f'' s'annule et change de signe en a .

N.B. : La condition « f'' s'annule » n'est pas suffisante : il faut également que f'' change de signe pour que l'on ait un point d'inflexion.